Lösungsskizzen Weihnachtsblatt

aus der VL Analysis 1 WS 14/15

Oliver Rümpelein

Diese Dokument enthält in den meisten Fällen nur Skizzen und Ideen, keine vollständigen (oder formal korrekten) Beweise. Zwar sind Lösungsskizzen nach bestem (Ge-)Wissen ausgeführt, aber ohne Gewähr auf Richtigkeit und Verständlichkeit. (Auch beim LaTeX-Satz könnte man sich mehr Mühe geben).

Verbesserungen und Nachfragen bitte an `oli_r@fg4f.de`.

Die aktuellste Version mit allen Verbesserungen und Anmerkungen gibt es auf `git.f3l.de`.

Aufgabe 1

a) i) $\sqrt{x}$ ist streng monoton steigend auf $\mathbb{R}^+$. (Verwende $\varepsilon > 0, x \geq 0$ beliebig und zeige $\sqrt{x} \leq \sqrt{x+\varepsilon}$ durch quadrieren).

ii) Sei nun $N \in \mathbb{N}$ beliebig. Wähle $x_0 > N^2$. Mit der Monotonie folgt dann $\sqrt{x} > N$ für alle $x > x_0$.

b) Der Trick ist, folgende Erweiterung anzuwenden:

$$\begin{aligned}\sqrt{n+1} - \sqrt{n} &= \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \cdot (\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} \\ &= \frac{1}{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} \quad \xrightarrow[\text{mit a)}]{n\to\infty} 0\end{aligned}$$

c) **Fall 1:** $c = 0$: Einfach ($\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} 0 = 0$), monoton steigend und fallend.

Fall 2: $c \geq 1$: Sei $a = \sqrt[n]{c} - 1$. Dann ist $a > -1$ und es gilt mit Bernoulli-Ugl.:

$$\begin{aligned}c &= (1+a)^n \geq 1 + a \cdot n \\ \Rightarrow 0 &\leq a \leq \frac{c-1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0\end{aligned}$$

Folge ist monoton fallend.

Fall 3: $0 < c < 1$: Betrachte hierfür die Folge $a'_n := \frac{1}{a_n} = \sqrt[n]{\frac{1}{c}}$. Dann ist $\frac{1}{c} > 1$ und die Beh. folgt mit Fall 2. Die Folge ist monoton steigend.

d)

$$\begin{aligned} d_n &:= \sqrt[n]{n} - 1 \\ n &= (1 + d_n)^n \end{aligned}$$

Nach dem binomischen Lehrsatz und Auslassung der meisten Summanden folgt $d_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

Aufgabe 2

a) Konvergenz folgt, da per Induktion immer $0 < a_{n+1} < a_n$ (Beschränkt und streng monoton).

Grenzwert: Böser Trick. Sei $a = \lim_{n\to\infty} a_n$. Nach Vorlesung gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1}$, also

$$\begin{aligned} a &= \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} a_n^2 \\ &= a - \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)^2 = a - a^2 \\ &\Rightarrow a^2 = 0 \\ &\Rightarrow a = 0 \end{aligned}$$

b) Wenn der Grenzwert exisitert: Ähnlich wie oben. Sei $b = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} b = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} = \lim_{n\to\infty} b_n &= \lim_{n\to\infty} b_{n+1} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n + a_{n-1}}{a_n} \\ &= 1 + b^{-1} \end{aligned}$$

und

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} - 1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{-1}$$

Zeige nun: $\varphi := \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ist Grenzwert. Via Induktion zeigt man hierfür

$$|b_n - \varphi| = \frac{1}{b_n}\frac{1}{\varphi^n},$$

also geht der Grenzwert gegen Null.

Aufgabe 3

a) Durch direkten Vergleich sieht man $0 < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+3} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ und letzteres ist konvergent. Da jeder Summand der Reihe positiv ist konvergiert die Reihe als Folge von Partialsummen.

b) Mit Quotientenkriterium:

$$\begin{aligned} \frac{\frac{(n+1)!^2}{(2n+2)!}}{\frac{n!^2}{(2n)!}} &= \frac{(n+1)^2}{4n^2+6n+2} \\ &= \frac{n^2+2n+1}{4n^2+6n+2} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{4} \end{aligned}$$

c) Mit Leibnizkriterium (Abschätzen der Folge durch $\frac{1}{\sqrt{n}}$).

Aufgabe 4

a) Nach Aufgabe 1 konvergiert $\sqrt[n]{n}$ gegen 1, also ist $\frac{1}{\sqrt[n]{n}}$ keine Nullfolge. Die Reihe kann also auch nicht absolut konvergieren.

b),c),d) Konvergieren nach Leibnizkriterium, da Nullfolgen. b) konvergiert absolut nach Majorantenkriterium (z.B. für $n > 100$ ersetze -1000 durch $-n^2$ und erhalte $\frac{7}{4n^2}$, c) und d) konvergieren nicht absolut. Minorante für c): $\frac{\sqrt{n}}{n} > \frac{1}{n}$, für d) ähnlich mittels $\sqrt{n} \to \sqrt{n-1}$.

Aufgabe 5

Siehe jedes bessere Analysisbuch. Grundidee:

a) Abschätzen durch geometrische Reihe

b) Finden einer konvergenten Teilfolge, die keine Nullfolge ist

c) Betrachte $\frac{1}{n}$ und $\frac{1}{n^2}$).

Aufgabe6

a) Mittels Reihendarstellung: $\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} > \frac{z^{2017}}{2017!}$, und damit:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2015}}{2014^n} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2015}}{\exp(n \cdot \ln(2014))} \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2015}}{\frac{(n \ln(2014))^{2017}}{2017!}} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2015} 2017!}{n^{2017} \ln(2014)^{2017}} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} C \cdot \frac{1}{n^2}\end{aligned}$$

b) **Fall 1:** $\alpha = 0$. Nach fallenlassen der ersten Glieder hat man $\frac{1}{n^n} < \frac{1}{n^2}$, also Konvergenz nach Majorantenkriterium.

Fall 2: $0 < \alpha < 1$. Wurzelkriterium (siehe Aufgabe 5), da $\alpha + \frac{1}{n} > 0$:

$$\sqrt[n]{\left(\alpha + \frac{1}{n}\right)^n} = \alpha + \frac{1}{n} \xrightarrow{n \to \infty} \alpha$$

und da $\alpha < 1$ existert auch ein $\alpha < \theta < 1$.

Fall 3: $\alpha \geq 1$:

$$\left(\alpha + \frac{1}{n}\right)^n \geq \alpha^n \geq 1^n$$

Die Reihe divergiert also nach Minorantenkriterium.

Aufgabe 7

Folgt leicht mittels streng monoton steigend und unbeschränkt in beide Richtungen.

Aufgabe 8

a) Siehe Blatt 12/4.

b) Angenommen, f sei L.-stetig für ein $L > 0$ (OBdA $L > 1$). Dann gilt mit $x = 0, y > L$:

$$|f(0) - f(y)| = y^2 > L * y$$

also Widerspruch.

c) Wähle z.B. für $\varepsilon > 0$: $\delta < \frac{\varepsilon}{L}$.

d) Grundidee: δ aus c) ist nicht von x_0 abhängig, nur von ε.

e) Teil 1 siehe Blatt 12/4, Teil 2: Ja, nach Satz 7.5 ist eine stetige Fkt. auf einer kompakten Menge (also auf einem abgeschlossenen und beschränkten Intervall) immer gleichmäßig stetig.

Aufgabe 9

Anwenden des Zwischenwertsatzes mit $a_1 = 0$ ($e^0 + e^{-0} = 2$) und $a_2 = 2$ ($e^2 + e^{-2} > e^2 > 2^2 = 4$).

Aufgabe 10

a) Aus $f'(x) = C$ folgt f linear, der Rest ist einfach

b) f ist ganz einfach identisch zu $x \mapsto x^2$.

Aufgabe 11

Ohne Gewähr: 6 Teile. Überlegung: Wir klassifizieren einen Punkt (x, y, z) im Würfel, der nicht auf einer der Ebenen liegt, durch:

$$(e_1, e_2, e_3) e_1, e_2, e_3 \in \{0, 1\}$$

wobei

$$e_1 = \begin{cases} 0 & \text{, falls } x < y \\ 1 & \text{, falls } x > y \end{cases}$$
$$e_2 = \begin{cases} 0 & \text{, falls } x < z \\ 1 & \text{, falls } x > z \end{cases}$$
$$e_3 = \begin{cases} 0 & \text{, falls } y < z \\ 1 & \text{, falls } y > z \end{cases}$$

Dann gibt es per se erst einmal $2^3 = 8$ mögliche Mengen , in denen ein Punkt liegen kann wenn er nicht auf einer der Ebene liegt (identifiziert mit allen dreier-Kombinationen von 1 und 0). Die beiden Fälle $(0, 1, 0)$ und $(1, 0, 1)$ können jedoch nicht auftreten, da sonst $x < y < z < x$ oder andersherum.

Aufgabe 12

Für $q \in \mathbb{Q}$ betrachte $I_q \coloneqq B_{\frac{|q-\sqrt{2}|}{2}}(q)$. Dann ist $\bigcup\limits_{q \in \mathbb{Q}} I_q = \mathbb{R} \setminus \{\sqrt{2}\}$.